ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU MARDI 18 AOUT 1936.

PRÉSIDENCE DE M. HENRI DOUVILLÉ.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

BIOLOGIE MATHÉMATIQUE. — *Le principe de la moindre action en biologie.* Note (¹) de M. **Vito Volterra**.

1. N étant la population d'une espèce, dN/N est son *accroissement relatif élémentaire* et $\int_1^N dN/N = \log N$ l'accroissement relatif total nécessaire pour atteindre la valeur actuelle N en partant d'un seul individu.

Or, dX étant l'accroissement élémentaire de la quantité de vie de l'espèce, on a

$$N = \frac{dX}{dt} = X'.$$

On peut appeler *action vitale élémentaire* la quantité

$$\beta \log N \, dX = \beta N \log N \, dt = \beta X' \log X' \, dt,$$

en voulant adopter une locution analogue à celle que l'on emploie en mécanique. (Par $1/\beta$ on entend l'*équivalent* de l'espèce).

Donc, pendant l'intervalle de temps $0, t$ l'action totale sera

$$\int_0^t \beta N \log N \, dt = \int_0^t \beta X' \log X' \, dt,$$

et, si l'on a une association de n espèces, l'*action vitale* totale sera

$$A = \int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r X'_r \log X'_r \, dt = \int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r N_r \log N_r \, dt.$$

(¹) Séance du 10 août 1936.

Or nous avons trouvé [1] que les lois de la lutte pour la vie dépendent d'une question du calcul des variations, c'est-à-dire que lorsque les équations des fluctuations biologiques sont satisfaites, une certaine expression est *stationnaire* pour toutes variations infinitésimales des paramètres qui individualisent les états successifs d'une association biologique.

Nous allons maintenant démontrer que le passage naturel d'un état à un autre de l'association correspond effectivement, sous *certaines conditions*, à un *minimum* de l'expression que nous avons appelée *action vitale*.

Il en ressort un principe analogue au principe de la moindre action en mécanique.

2. Nous avons mis les équations des fluctuations biologiques sous la forme

$$(1) \qquad \beta_r \frac{d^2 X_r}{dt^2} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_{s=1}^{n} a_{sr} \frac{dX_s}{dt} \right) \frac{dX_r}{dt}$$

et nous avons trouvé les intégrales [2]

$$(2) \qquad \Theta_r = \beta_r \log X'_r + \sum_{s=1}^{n} a_{rs} X_s - \varepsilon_r \beta_r t - C_r = 0,$$

$$(3) \qquad P = \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \beta_r X_r - \sum_{r=1}^{n} \beta_r X'_r - C = 0,$$

les C_r et C étant des constantes. On en tire l'intégrale

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Theta &= \sum_r X'_r \Theta_r + P \\ &= \sum_{1}^{n} \beta_r X'_r \log X'_r + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} X_s X_r \\ &\quad - \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \beta_r t X'_r - \sum_{r=1}^{n} C_r X'_r + \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \beta_r X_r - \sum_{r=1}^{n} \beta_r X'_r - C = 0. \end{aligned}$$

Si nous varions les quantités X_r de manière que $\delta t = 0$ (variation isochrone) nous trouverons

$$\delta\Theta = \sum_{r=1}^{n} \delta X'_r . \Theta_r + \sum_{r=1}^{n} \delta X_r \left(\sum_s a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r \right)$$

---

(1) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1935 et suiv.

(2) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 2113 et suiv.

et en supposant que les équations (2) soient vérifiées par les $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on aura

$$\delta\Theta = \sum_1^n {}_r \delta X_r \left(\sum_1^n {}_s a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r \right).$$

Donc si la variation isochrone sera telle que

$$\sum_1^n {}_r \delta X_r \left(\sum_1^n {}_s a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r \right) = 0,$$

on aura

$$\delta\Theta = 0.$$

c'est-à-dire on pourra par une variation isochrone conserver l'intégrale (4).

Par conséquent les deux conditions

$$(5) \qquad \sum_1^n {}_r \delta X_r \left(\sum_1^n {}_s a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r \right) = 0,$$

$$(5') \qquad \delta\Theta = 0$$

sont équivalentes par une même variation isochrone.

Il est évident que nous pourrons prendre arbitrairement $n - 1$ des quantités $\delta X_1, \delta X_2, \ldots, \delta X_n$, et la $n^{\text{ième}}$ sera déterminée par la (5). Par conséquent on pourra annuler contemporairement $\delta X_1, \delta X_2, \ldots, \delta X_n$ aux limites 0, t.

3. Nous avons vu que les conditions (5) et (5′) sont équivalentes. La première exprime que la variation isochrone conserve l'intégrale (4).

Cherchons maintenant d'interpréter la seconde condition.

A cet effet remarquons que, les coefficients d'accroissement des différentes espèces étant à un certain instant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $\delta X_1, \delta X_2, \ldots, \delta X_n$ étant des variations virtuelles des quantités de vie, on peut regarder

$$\sum_1^n {}_r \beta_r \lambda_r \delta X_r$$

comme *le travail virtuel d'accroissement.* Or les coefficients d'accroissement *vrais* sont

$$\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \Sigma_s a_{sr} N_s = \varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \Sigma_s a_{sr} X'_s \quad (^1),$$

---

(1) On les appelle *vrais* pour les distinguer des coefficients d'accroissement ε_r.

par suite

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}(\varepsilon_r\beta_r + \Sigma_s a_{sr}X'_s)\,\delta X_r$$

sera le travail virtuel d'accroissement pour la variation $\delta X_1, \delta X_2, \ldots, \delta X_n$. C'est pourquoi la condition (5) exprime que le *travail d'accroissement virtuel* est nul.

4. Donnons maintenant une démonstration de la propriété annoncée au paragraphe 1. Écrivons d'abord [voir citation du paragraphe 1, p. 1956, form. (B')]

$$2\Phi - \Theta = \sum_{n}^{1}{}_{r}\beta_r \log X'_r + \frac{d}{dt}\left[\sum_{1}^{n}{}_{r}\varepsilon_r\beta_r t X_r + \sum_{1}^{n-1}{}_{r}(C_r + \beta_r)X_r\right] + C,$$

on aura

$$\chi = \sum_{1}^{n}{}_{r}\beta_r X'_r \log X'_r = 2\Phi - \Theta - \frac{d}{dt}\left[\sum_{1}^{n}{}_{r}\varepsilon_r\beta_r t X_r + \sum_{1}^{n}{}_{r}(C_r + \beta_r)X_r\right] - C,$$

et par suite

$$A = \int_0^t \chi\,dt = \int_0^t (2\Phi - \Theta)\,dt - \left[\sum_{1}^{n}\varepsilon_r\beta_r t X_r + \sum_{1}^{n}(C_r + \beta_r)X_r\right]_0^t - Ct.$$

Prenons $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tels que les équations (1) soient vérifiées, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial X'_r} - \frac{\partial\Phi}{\partial X_r} = 0.$$

En outre supposons que les variations isochrones $\delta X_1, \delta X_2, \ldots, \delta X_n$ satisfont la condition

$$\delta\Theta = 0,$$

c'est-à-dire la condition (5), et supposons que ces quantités soient nulles aux limites 0, t.

On aura

$$\delta A = 0.$$

5. Nous arrivons au résultat définitif. En effet on tire de l'équation (6)

$$\delta^2 A = \delta^2\int_0^t \chi\,dt = \int_0^t \sum_{1}^{n}{}_{r}\beta_r\frac{\delta X_r'^2}{X'_r}\,dt.$$

Or les $X'_r = N_r$ sont positives, par suite,

$$\delta^2 A > 0.$$

Donc toute *variation isochrone infiniment petite des* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *conservant l'intégrale* (4), *détermine une augmentation de l'action vitale.*

Il s'agit donc d'un *minimum*. Cela prouve le *principe de la moindre action vitale.*

CORRESPONDANCE.

THÉORIE DES GROUPES. — *Sur la représentation analytique des groupes de Lie.* Note (¹) de M. **Herman Auerbach**, transmise par M. Élie Cartan.

Théorème I. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupe de Lie, réel ou complexe, connexe et intégrable. Si*

(1) $$u_1, u_2, \ldots, u_r$$

est une base infinitésimale de $\mathcal{G}$ *telle que les transformations infinitésimales* $u_1, \ldots, u_i$ *forment un sous-groupe* $\mathcal{G}_i$ *de* $\mathcal{G}$ *et que* $\mathcal{G}_i$ *soit un sous-groupe invariant de* $\mathcal{G}_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, r-1)$, *alors l'expression*

(2) $$e^{t_1 u_1} e^{t_2 u_2} \ldots e^{t_r u_r}$$

représente le groupe entier.

Démonstration. — Le groupe $\mathcal{G}_{r-1}$ étant un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$, on peut représenter tout élément du groupe $\mathcal{G}$ comme produit de deux éléments appartenant respectivement aux groupes $\mathcal{G}_{r-1}$ et $e^{t_r u_r}$ (²). Par conséquent, si le groupe $\mathcal{G}_{r-1}$ admet la représentation en question, il en est de même de $\mathcal{G}$. Pour $r = 1$ le théorème est évident.

Lorsque le groupe $\mathcal{G}$ est de rang zéro, il est complètement engendré par ses transformations infinitésimales (³). Mais il n'en est pas ainsi pour tous

(¹) Séance du 10 août 1936.

(²) Si un groupe connexe de Lie $\mathcal{G}$ se compose de deux sous-groupes dont un est invariant, tout élément de $\mathcal{G}$ est le produit de deux éléments appartenant respectivement à ces deux groupes. Cela est évident pour les éléments voisins de l'élément-unité et résulte pour les autres éléments d'un théorème bien connu de O. Schreier.

(³) Voir E. Cartan, *Mém. Sc. Math.*, 42, 1930, p. 21.

les groupes intégrables. Par exemple, les éléments du groupe intégrable complexe $x' = ax$, $y' = bx + a^{-1}y$ pour lesquels $a = -1$, $b \neq 0$ ne peuvent être engendrés par aucune transformation infinitésimale. Cependant, il est toujours possible de représenter tout élément du groupe $\mathcal{G}$ comme produit de deux éléments dont chacun est engendré par une transformation infinitésimale. On a en effet le

Théorème II. — *Si la base* (1) *du groupe intégrable $\mathcal{G}$ est choisie de manière que l'un des groupes $\mathcal{G}_i$, soit $\mathcal{G}_p$, se confonde avec le sous-groupe invariant de rang zéro défini en égalant à zéro les racines de Killing de $\mathcal{G}$* [1], *alors l'expression*

$$e^{l_1 u_1 + \ldots + l_p u_p} e^{l_{p+1} u_{p+1} + \ldots + l_r u_r} \tag{3}$$

représente le groupe entier.

Démonstration. — Le groupe $\mathcal{G}_p$ (supposé connexe) étant engendré par ses transformations infinitésimales, on peut d'abord remplacer l'expression (3) par

$$e^{l_1 u_1 + \ldots + l_p u_p} e^{l_{p+1} u_{p+1}} \ldots e^{l_r u_r}. \tag{4}$$

Posons

$$A(\vartheta) = e^{\vartheta l_{p+1} u_{p+1}} \ldots e^{\vartheta l_r u_r} e^{-\vartheta(l_{p+1} u_{p+1} + \ldots + l_r u_r)} \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1). \tag{5}$$

A cet élément correspond dans le groupe adjoint de $\mathcal{G}$ la matrice

$$e^{\vartheta l_{p+1} E_{p+1}} \ldots e^{\vartheta l_r E_r} e^{-\vartheta(l_{p+1} E_{p+1} + \ldots + l_r E_r)},$$

dont les multiplicateurs sont tous égaux à 1. Or les éléments du groupe $\mathcal{G}$ pour lesquels les matrices correspondantes du groupe adjoint jouissent de cette propriété forment évidemment un sous-groupe fermé dans $\mathcal{G}$. D'après un théorème important de M. Cartan [2] c'est un groupe de Lie. Il est aisé de voir que la composante de ce groupe qui contient l'élément-unité coïncide avec $\mathcal{G}_p$.

En faisant varier dans (5) ϑ de 0 à 1, on voit que l'élément $A(1)$ appartient à cette composante et, par suite, est engendré par une transformation infinitésimale de $\mathcal{G}_p$. On a donc

$$e^{l_{p+1} u_{p+1}} \ldots e^{l_r u_r} = e^{s_1 u_1 + \ldots + s_p u_p} e^{l_{p+1} u_{p+1} + \ldots + l_r u_r}.$$

En portant dans (4) on obtient la représentation cherchée.

---

(1) Cela est toujours possible, puisque ce groupe contient le groupe dérivé de $\mathcal{G}$.

(2) E. Cartan, *loc. cit.*, p. 24.

Théorème III. — *Tout élément d'un groupe connexe de Lie $\mathcal{G}$ (réel ou complexe) est le produit de quatre éléments dont chacun est engendré par une transformation infinitésimale.*

Démonstration — Le groupe $\mathcal{G}$ se compose d'un certain nombre de groupes simples échangeables entre eux et de son plus grand sous-groupe invariant intégrable ([1]). Tout élément de $\mathcal{G}$ peut être décomposé en facteurs appartenant respectivement à ces différents sous-groupes. Or chaque facteur contenu dans un sous-groupe simple est le produit d'au plus deux éléments engendrés par des transformations infinitésimales de ce sous-groupe ([2]). Les sous-groupes simples étant échangeables entre eux, le produit de tous ces facteurs est encore représentable comme produit de deux éléments engendrés par des transformations infinitésimales. Enfin, le dernier facteur l'est aussi, en vertu du théorème II.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur un jet gazeux.* Note ([3]) de M. **Caïus Jacob**, présentée par M. Henri Villat.

I. En reprenant les notations d'une Note antérieure ([4]), nous nous proposons d'étudier quelques propriétés du mouvement plan, permanent, infrasonore, d'un fluide parfait compressible venant de l'infini en amont et s'écoulant par un trou BB′ percé dans une paroi constituée par deux droites infinies AB, A′B′, faisant entre elles un angle égal à 2μ, $(0 < \mu < \pi)$; nous choisirons deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et supposerons que Ox est l'axe de symétrie de la figure. La loi caractéristique adoptée pour le gaz est la loi adiabatique. La méthode que nous employons pour obtenir l'expression du potentiel et de la fonction de courant est celle de M. Tchapliguine ([5]), convenablement étendue ; signalons aussi que le cas où $\mu = \pi/2$ a déjà été traité par M. Tchapliguine dans le travail cité.

---

(1) E.-E. Levi, *Atti Accad. Turino*, 10, 1905, p. 551-565. Une nouvelle démonstration de ce théorème, valable aussi dans le cas réel, a été récemment donnée par M. J. H. C. Whitehead; voir E. Cartan, *Act. Scient. Ind.*, 358, 1936, note de la page 19.

(2) E. Cartan, *Ann. di Mat.*, 4e série, 4, 1926-1927, p. 209-256; et *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, 44, 1927, p. 345-467.

(3) Séance du 10 août 1936.

(4) C. Jacob, *Comptes rendus*, 197, 1933, p. 125; *Mathematica*, 8, 1934, p. 201.

(5) A. Tchapliguine, *Annales scientifiques de Moscou*, 21, 1904, p. 1.

Soient (λ) et (λ') les lignes de courant qui se détachent des parois aux points B et B'; nous désignerons par $q/2$ et $-q/2$ $(q<0)$ les valeurs de la fonction de courant sur (λ) et (λ') et par ρ_0 la densité du fluide à l'infini en amont.

En étudiant d'abord le problème correspondant aux mêmes conditions aux limites pour un liquide parfait, on est conduit aux expressions suivantes du potentiel φ et de la fonction de courant ψ du jet gazeux

$$\varphi(\theta,\tau)=-\frac{q}{2\mu}(1-\tau)^{-\beta}+\frac{q}{4\mu}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta}}$$
$$+\frac{q}{\pi}(1-\tau)^{-\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\lambda_n}x_n(\tau,\mu)\frac{y_n(\tau,\mu)}{y_n(\tau_0,\mu)}\cos 2\lambda_n\theta$$

$$\psi(\theta,\tau)=-\frac{q\theta}{2\mu}-\frac{q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\lambda_n}\frac{y_n(\tau,\mu)}{y_n(\tau_0,\mu)}\sin 2\lambda_n\theta,$$

où, rappelons-le, $y_n(\tau,\mu)$ désigne la série hypergéométrique de Gauss, $F(a_n, b_n, c_n; \tau)$, dont les arguments sont donnés par

$$a_n+b_n=2\lambda_n-\beta,\qquad a_n b_n=-\beta\lambda_n(2\lambda_n+1),\qquad c_n=2\lambda_n+1,$$

en posant $\lambda_n=n\pi/2\mu$; on a aussi

$$x_n(\tau,\mu)=1+\frac{\tau}{\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\tau}(\log y_n).$$

Le coefficient de contraction du jet est donné par

$$c(\tau_0,\mu)=\frac{1}{1+2\pi\sin\mu\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n x_n(\tau_0,\mu)}{n^2\pi^2-\mu^2}},$$

la largeur de l'orifice $l_{BB'}$ ayant comme expression

$$l_{BB'}=\frac{q(1-\tau_0)^{-\beta}}{\sqrt{2\alpha\tau_0}}\left[1+2\pi\sin\mu\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n x_n(\tau_0,\mu)}{n^2\pi^2-\mu^2}\right].$$

II. *Propriétés de la fonction* $x_n(\tau,\mu)$. — On a les inégalités suivantes, qui s'établissent à partir de l'équation différentielle de Riccati que vérifie $x_n(\tau,\mu)$ comme fonction de τ,

(a) $$\lambda_n x_n<\lambda_{n+p}x_{n+p}\qquad(0<x_n\leqq 1,\ x_n\geqq x_{n+p}),$$

(b) $$\lambda_n(1-x_{n+p})<\lambda_{n+p}(1-x_n),$$

(c) $$\gamma_n(\tau,\mu)=\frac{\partial x_n}{\partial\mu}\geqq 0,\qquad \gamma_n\leqq\frac{x_n}{\mu},$$

et

$$(d)\qquad \lambda_{n+p}\gamma_n \geqq \lambda_n \gamma_{n+p},$$

$$(e)\qquad 0 \leqq \frac{\partial y_n}{\partial \mu} \leqq \frac{2\beta\lambda_n}{\mu} y_n \log\frac{1}{1-\tau},$$

$$(f)\qquad \lambda_{n+p}\frac{\partial x_n}{\partial \tau} < \lambda_n \frac{\partial x_{n+p}}{\partial \tau} < 0,$$

p étant un nombre entier positif. De plus, $1/\lambda_n \partial x_n/\partial\tau$ tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. C'est ce qui résulte du fait que $x_n(\tau, \mu)$ tend vers $\sqrt{1-2\beta\tau/(1-\tau)}$ pour $n=+\infty$.

III. *Propriétés du mouvement considéré.* — Les propriétés ci-dessus indiquées de la fonction $x_n(\tau, \mu)$ nous permettent d'étudier le coefficient de contraction et la largeur de l'orifice comme fonctions de τ_0 et de μ. On voit d'abord que $c(\tau_0, \mu)$ est une fonction continue et à dérivées premières continues par rapport à ces variables, pour $0<\mu<\pi$, $0\leqq\tau_0\leqq 1/(2\beta+1)$, qui vérifie les inégalités $1/2\leqq c(\tau_0, \mu)\leqq 1$. En vertu de (f) on a $\partial c/\partial\tau_0 > 0$, ce qui entraîne une meilleure limitation de $c(\sigma_0, \mu)$, à savoir

$$k(\mu)=c(0, \mu)\leqq c(\tau_0, \mu)\leqq c\left(\frac{1}{2\beta+1}, \mu\right);$$

$k(u)$ est le coefficient de contraction du jet liquide associé. On peut montrer de plus que, *en nous bornant au cas où* $0<\mu\leqq\pi/2$, *parmi tous les écoulements ayant le même débit et la même vitesse à l'infini en aval, c'est pour celui correspondant à des parois en prolongement l'une de l'autre* ($\mu=\pi/2$) *que le coefficient de contraction est le plus petit.* En particulier, on a, dans le cas de l'air, $\pi/(\pi+2)\leqq c(\tau_0, \pi/2)\leqq 0{,}74\ldots$. Il s'ensuit aussi que *la largeur de l'orifice* BB' *est une fonction croissante de* μ *et décroissante par rapport à* τ_0.

Ces propriétés permettent de discuter aisément le problème de la détermination de τ_0 pour des parois données à l'avance, le débit étant donné. Signalons encore le résultat suivant, obtenu en comparant différents jets correspondant au même débit et à la même largeur de l'orifice : *le long des lignes de courant* (λ) *et* (λ'), *la vitesse* V_0 *est une fonction croissante de* μ, ($0<\mu\leqq\pi/2$).

En étudiant les systèmes conjugués que vérifient θ et τ comme fonctions de φ et de ψ, on peut établir les propriétés suivantes : 1° le long des lignes de courant la vitesse croît sans cesse de zéro (à l'infini en amont) à la valeur V_0 (à l'infini en aval); 2° sur chaque ligne de courant l'angle θ, que fait la vitesse avec l'axe de symétrie, varie en croissant constamment dans le domaine situé au-dessus de cette axe; il décroît constamment dans le domaine situé au-dessous.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Les problèmes de représentation conforme de Helmholtz ; théorie des sillages et des proues en fluide limité par une ou deux parois planes.* Note [1] de M. **Julien Kravtchenko**, transmise par M. Henri Villat.

Nous avons complété nos théorèmes d'existence [2] par une discussion d'unicité. On peut résumer nos conclusions comme suit : les catégories d'obstacles, pour lesquelles M. J. Leray [3] a prouvé que le problème du sillage possède une solution unique, et celles pour lesquelles il a prouvé que le problème de la proue possède une solution unique et acceptable, jouissent de la même propriété quand le courant fluide, au lieu d'être illimité, est limité par une ou deux parois planes.

I. Cas où la solution du problème du sillage est unique. — L'équation aux variations de l'équation intégro-différentielle de M. Villat [4] équivaut à un problème aux limites envisagé par M. A. Weinstein [5]. Les nouvelles conditions aux limites qui s'introduisent sont les suivantes : la fonction harmonique inconnue β est donnée à une constante additive près sur chacune des parois; elle est continue aux points à l'infini en aval des parois; dans le cas de deux parois elle est discontinue au point à l'infini en amont. Des raisonnements analogues à ceux de M. Leray conduisent aux résultats suivants :

1° *Le problème du sillage posé pour un obstacle symétrique placé symétriquement dans un canal rectiligne possède une seule solution* [6].

2° *Le problème du sillage posé pour un obstacle convexe situé dans un courant limité par une ou deux parois planes possède une seule solution.*

II. Validité des solutions du problème de la proue. — *Toute solution du problème de la proue est acceptable quand l'obstacle est en accolade.*

---

(1) Séance du 10 août 1936.

(2) *Comptes rendus*, **201**, 1936, p. 250.

(3) *Commentarii Mathematici Helvetici*, **8**, 1936, p. 250.

(4) *Journal de Mathématiques*, 6e série, **7**, 1911, p. 353.

(5) Voir, par exemple, *Mathematische Zeitschrift*, **31**, 1929, p. 424.

(6) Ce théorème d'unicité a déjà été établi d'une autre manière par M. Weinstein (*loc. cit.*) sous des hypothèses moins générales; il a été étendu depuis par MM. K. Friedrichs (*Mathematische Annalen*, **109**, 1933, p. 60) et Leray-Weinstein (*Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 430).

Ce théorème, déjà établi pour un courant illimité (1), subsiste quand le courant est limité par une ou deux parois planes. En effet le régionnement du domaine fluide en mouvement suivant les signes des parties réelle et imaginaire de la fonction $d\omega/df$ offre les mêmes caractères malgré les nouvelles conditions aux limites que la présence des parois planes impose à la fonction $d\omega/df$ (2).

III. Nombre de solutions du problème de la proue. — Les résultats obtenus dans les deux premiers paragraphes permettent de déduire des raisonnements de M. Leray les conclusions suivantes :

Le problème de la proue possède une solution quand l'obstacle est un arc circulaire convexe, le courant étant limité par une ou deux parois planes (3).

Le problème symétrique de la proue, posé pour un obstacle symétrique en accolade, placé symétriquement dans un canal rectiligne, possède une seule solution.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Les mouvements d'un corps déformable associés aux champs électromagnétiques généraux.* Note (4) de M. **Gino Arrighi**, présentée par M. Louis de Broglie.

1. Nous appellerons champ électromagnétique général le champ des couples de vecteurs

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{1}$$

$$H = \operatorname{rot} v, \tag{2}$$

où v est un vecteur fonction du point P et du temps t (vecteur potentiel du champ électromagnétique général) et c est la vitesse de la lumière dans le vide.

D'après (1), (2), on a identiquement

$$\operatorname{div} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \operatorname{div} v}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{4}$$

---

(1) J. Leray, *Sur la validité des solutions du problème de la proue* (*Jubilé de M. M. Brillouin*, 1935, p. 246).

(2) Les raisonnements utilisent notre Note des *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 208.

(3) M. C. Jacob a démontré (*Thèse*, p. 106) l'unicité de la solution du problème de la proue dans le cas du cercle placé symétriquement dans un canal.

(4) Séance du 10 août 1936.

et

(5)
$$\operatorname{div} H = 0,$$
$$\operatorname{rot} H = \operatorname{rot}^2 v,$$

d'autre part

$$\Delta' v = \operatorname{grad} \operatorname{div} v - \operatorname{rot}^2 v,$$

et, en vertu de

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

la dernière équation (5) nous donne

(6)
$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{grad} \operatorname{div} v - \Box' v,$$

où $\Box'$ est l'opérateur d'Alembertien. Les (3), (4), (5), (6) sont les équations du champ électromagnétique général. En donnant au vecteur potentiel v la valeur

$$v = \Phi - c\int \operatorname{grad} V\, dt,$$

on retombera sur les équations de M. Malet puis sur celles de Lorentz et de M. Ferrier [1].

2. Considérons un mouvement non stationnaire et non irrotationel ayant les $P' = V$ comme équations des trajectoires.

Pour l'accélération dans le mouvement associé au champ électromagnétique général

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dP}v + \frac{\partial v}{\partial t} = K\frac{\partial v}{\partial P}v + \operatorname{rot} v \vee v + \frac{\partial v}{\partial t},$$

en observant que

$$K\frac{dv}{dP}v = \frac{1}{2}\operatorname{grad}(v^2),$$

et, des (1), (2), on tire

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}(v^2) + H \wedge v - cE.$$

En posant

$$F = E + \frac{1}{c}v \wedge H$$

---

(1) *Comptes rendus*, 183, 1926, p. 191.

(vecteur de la force électromagnétique générale), on en déduit finalement

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\,\text{grad}\,(v^2) - c\text{F}.$$

Dans le cas d'un mouvement irrotationel, on obtient un champ électrique général, et, pour un mouvement stationnaire, nous avons un champ magnétique général.

Un mouvement irrotationel et stationnaire est associé à un champ électromagnétique nul.

SPECTROSCOPIE. — *Sur le spectre d'absorption du potassium.* Note [1] de MM. **Ny Tsi-Zé** et **Weng Wen-Po**, transmise par M. Ch. Fabry.

A côté des raies de la série principale des métaux alcalins, on a observé [2] en absorption des raies ou bandes nouvelles. En travaillant avec des vapeurs très denses de rubidium, nous [3] avons pu en découvrir un plus grand nombre. Avec un dispositif analogue à celui décrit dans la Note précédente, nous avons retrouvé toutes les raies ou bandes de potassium déjà signalées par H. Kuhn et par Datta et Chakravarty et constaté l'existence d'autres raies ou bandes nouvelles, et nous les avons classifiées empiriquement en séries.

Pour avoir une longue colonne de vapeur dense de potassium, nous avons utilisé un tube en acier de 80^{cm} de longueur et de $2^{\text{cm}},8$ de diamètre avec deux fenêtres de quartz, mastiquées à la picéine. Le tube est chauffé électriquement sur la majeure partie de sa longueur sauf aux deux extrémités refroidies par une circulation d'eau. La température a varié de 500° à 800° C. Un tube à hydrogène dont le régime normal est de 800 milliampères sous 3000 volts était utilisé comme source lumineuse et l'appareil dispersif était le spectrographe E_1 de Hilger à optique de quartz.

---

(1) Séance du 10 août 1936.

(2) H. Kuhn, *Zeit. für Physik*, **79**, 1932, p. 782; Datta et Chakravarty, *Indian Journ. of Physics*, **7**, 1932, p. 273; Ny Tsi-Zé et Choong Shin-Piaw, *Journal de Physique*, **6**, 1935, p. 203.

(3) *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 1428.

	500° C.			800° C.			
4S-*m*P.	B.	C.	D.	A.	B.	C.	D.
–	–	–	–	–	3482,8 Å	–	–
–	–	–	–	–	3467,4	–	–
–	3461,5 Å	–	–	–	3461,5	–	–
3447,7 Å	–	–	–	–	–	–	–
3446,7	–	–	–	–	–	–	–
–	–	3434,0 Å	–	–	–	3434,0 Å	–
–	–	–	–	–	–	–	3422,3 Å
–	–	–	–	–	3227,5	–	–
–	3221,4	–	–	–	3221,4	–	–
3217,5	–	–	–	–	–	–	–
3217,0	–	–	–	–	–	–	–
–	–	3214,7	–	–	–	3214,7	–
–	–	–	–	–	–	–	3210,6
–	–	–	–	3124,6 Å	–	–	–
–	–	–	–	3117,6	–	–	–
–	–	–	–	–	3111,3	–	–
–	3106,6	–	–	–	3106,6	–	–
3102,2	–	–	–	–	–	–	–
3102,0	–	–	–	–	–	–	–
–	–	3101,5	–	–	–	3101,5	–
–	–	–	–	–	–	–	3098,1
–	–	–	–	–	–	–	3095,0
–	–	–	–	3044,2	–	–	–
–	–	–	–	–	3040,0	–	–
–	–	–	–	–	3037,7	–	–
3034,8	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	3032,6 Å	–	–	–	3032,6
–	–	–	–	–	–	–	3031,0
–	–	–	–	2998,1	–	–	–
2992,2	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	2990,7	–	–	–	2990,7
–	–	–	–	2967,3	–	–	–
2963,2	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	2962,0	–	–	–	2962,0
–	–	–	–	2944,7	–	–	–
2942,7	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	2941,6	–	–	–	2941,6
2927,9	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	2926,4

A la température de 500° C. apparaissent, d'une part, deux raies nouvelles à côté de chacune des raies principales 4S-6P, 4S-7P et 4S-8P, l'une située du côté des courtes longueurs d'onde et l'autre du côté opposé et, d'autre part, à côté de chaque raie de 4S-9P à 4S-12P seulement une raie nouvelle du côté des courtes longueurs d'onde. Les trois raies du côté de grandes longueurs d'onde font partie d'une série B, tandis que celles du côté des courtes longueurs d'onde appartiennent à deux séries C et D comme les spectres pris à de plus hautes températures le montrent. Les raies des trois séries se rapprochent de plus en plus des raies voisines de la série principale à mesure que les numéros d'ordre de ces dernières augmentent.

A la température de 650° C. environ commencent à apparaître d'autres raies nouvelles du côté de grandes lougueurs d'onde des raies principales. Ces raies nouvelles sont plus écartées des raies principales que celles de la série B et elles font partie d'une série A. D'autre part, du côté des courtes longueurs d'ondes des raies principales apparaissent aussi des raies nouvelles, qui s'en écartent plus que celles de la série C et qui complètent la série D.

Nous observons à la température de 700° C. entre les deux raies 4S-5P et 4S-6P un système de bandes qui n'a pas été antérieurement signalé à notre connaissance et dont les longueurs d'onde de quelques têtes des bandes sont indiquées ci-dessous :

3598 3588 3579 3471 3563 3555 3547 3539 3532 Å.

Ces bandes sont diffuses et dégradent vers le rouge.

MINÉRALOGIE. — *Sur les sépiolites.* Note (¹) de MM. **Henri Longchambon** et **Georges Migeon**

Nous avons eu l'occasion d'étudier trois nouveaux échantillons de sépiolite remarquables par leur haut degré de cristallinité et de pureté. L'un, de provenance inconnue, a l'aspect d'un cuir de montagne très souple à structure macroscopiquement fibreuse enchevêtrée (échantillon I). Le second provenant du Piémont a l'aspect d'un carton de montagne à texture fibreuse enchevêtrée (échantillon II). Le troisième, provenant de Strazek et dû à l'obligeance de M. Slavik, se présente comme un carton de montagne dur et cassant à texture fibreuse partiellement orientée (échantillon III).

(¹) Séance du 10 août 1936.

Ces échantillons à texture fibreuse visible à l'œil nu se rapprochent ainsi de la sépiolite d'Ampandrandava dont Mlle Caillère et nous avons décrit antérieurement les caractéristiques et qui reste le seul échantillon connu à ce jour comme offrant un parallélisme rigoureux de ses fibres.

Nous avons appliqué à ces trois échantillons les mêmes techniques d'étude des propriétés physico-chimiques que celles utilisées pour l'échantillon d'Ampandrandava et pour un certain nombre de sépiolites cryptocristallines (1) à savoir : établissement des courbes de déshydratation et des courbes dilatométriques, étude des propriétés zéolitiques, étude des radiogrammes de diffraction du rayonnement X et de leur évolution en fonction de la température.

Les caractéristiques ainsi obtenues sont identiques à celles que nous avions précédemment observées.

D'autre part l'analyse chimique de ces échantillons a donné les résultats suivants :

									H^2O			
	SiO^2.	Al^2O^3.	Fe^2O^3.	MnO.	CaO.	MgO.	K^2O.	Na^2O.	zéolitique.	entre 350° et 750°.	à 750°.	Total.
I.....	53,85	0,62	0,16	»	0,33	24,68	0,04	0,26	13,75	4	2,25	99,94
II....	53,24	0,19	1,95	»	0,46	22,87	0,15	0,27	13,95	3,96	2,48	99,52
III...	52,90	0,46	0,74	0,69	0,24	23,20	0,07	0,22	15,52	3,97	1,74	99,75

L'ensemble de ces résultats physiques et chimiques confirme les caractéristiques d'espèce précédemment indiquées et nous conduit à la même interprétation théorique (2). Ces trois échantillons apparaissent comme des corps à structure fibreuse d'amphibole et toutes leurs propriétés sont correctement représentées par les formules suivantes, en réunissant l'aluminium au calcium et aux alcalins sous le terme Mg :

I. $Si^4O^{11}Mg^{2,8}H^{0,4}.1H^2O.(H^2O)^Z$ $(Z = 3,4)$,
II. $Si^4O^{11}Mg^{2,7}H^{0,6}.1H^2O.(H^2O)^Z$ $(Z = 3,5)$,
III. $Si^4O^{11}Mg^{2,75}H^{0,5}.1H^2O.(H^2O)^Z$ $(Z = 3,9)$.

Nous ne pouvons adopter l'interprétation théorique récemment proposée pour les sépiolites par M. J. de Lapparent (3) et qui tend à attribuer à ce minéral une structure de phyllite du type de celle des micas. Cette inter-

(1) G. Migeon, *Bull. Soc. franç. de Min.*, 59, 1936, p. 6.

(2) H. Longchambon, *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 1607; H. Longchambon et G. Migeon, *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 1946.

(3) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1728.

prétation, qui néglige bien des particularités observées avec les sépiolites, reste spéculative. L'observation dans la structure d'une équidistance voisine de 10 angströms ne peut suffire à caractériser une phyllite. L'observation dans la sépiolite d'Ampandrandava de plans de clivages à 90° dont le jeu découperait la masse en prismes parallèles et expliquerait ainsi la texture apparemment fibreuse de l'échantillon aurait pour conséquence que l'on se trouverait ainsi en présence d'un monocristal homogène de dimensions sensibles. Ce dernier fait, qui serait de la plus haute importance pour l'étude de la structure des sépiolites, pourrait être immédiatement vérifié par diffraction du rayonnement X. Jusqu'ici, dans les très nombreux radiogrammes que nous avons effectués avec ce minéral maintenu immobile, nous avons invariablement obtenu un parfait radiogramme *de fibres* au sens précis que les cristallographes donnent à ce mot, résultat contraire à l'hypothèse d'un monocristal.

La relation structurale que nous avions signalée entre les sépiolites et le composant de certaines terres à foulons comme celle de Mormoiron (¹), relation qu'admet M. de Lapparent, confirme d'autre part notre interprétation des sépiolites. Ce composant est en effet une palygorskite à structure fibreuse.

GÉOLOGIE. — *Le Néocomien dans l'Aurès (Algérie).*

Note (²) de M. **Robert Laffitte**, présentée par M. Ch. Jacob.

L'existence du Néocomien dans l'Aurès a été révélée par les explorations de Tissot, et c'est d'après ses indications que ce terrain a été figuré sur la carte géologique au 800.000ᵉ de l'Algérie ; mais ces affleurements n'ont jamais été décrits et il n'a pas été cité de fossiles.

A la périphérie des terrains jurassiques qui forment le cœur de l'anticlinal du Djebel el Azereg (³), on observe une importante auréole de terrains néocomiens avec la succession suivante :

1. Marnes jaunes-verdâtres ou blanchâtres, reposant en concordance sur le Berriasien au Nord-Est, ou sur les dolomies tithoniques perforées par des Mollusques lithophages au Sud-Ouest. A la base, un horizon à fossiles pyriteux m'a fourni : *Phylloceras serum* Oppel, *P. Thetys* d'Orb., *P. semisulcatum* d'Orb. type et var.

(¹) H. Longchambon, *Comptes rendus*, 201, 1935, p. 483.

(²) Séance du 10 août 1936.

(³) Robert Laffitte, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 773.

Gevreyi Sayn, *P. Calypso* d'Orb. *Lytoceras Juilleti* d'Orb., *L. quadrisulcatum* d'Orb,, *Hoplites* (*Neocomites*) *neocomiensis* d'Orb. type et variétés *premolica* Sayn et *subquadrata* Sayn, *H.* (*N.*) *eucyrtus* Sayn, *H.* (*N.*) cf. *trezanensis* Lory, *H.* (*Thurmannia*) *Thurmanni* Pict. et Camp., *H.* (*T.*) *pontetiana* Sayn, *H.* (*T.*) *salientina* Sayn, *H.* (*Kilianella*) *Roubaudi*, d'Orb., *H.* (*K.*) *lucensis* Sayn, *H.* (*K.*) *ischnotera* Sayn, *Holcostephanus* (*Astieria*) sp. aff. *Chaignoni* Sayn, *H.* (*Spiticeras*) sp. aff. *binodum* Burckh., *H.* (*S.*) sp. (2 espèces), *Simoceras diense* Sayn, *Garnieria* sp. (2 espèces), *Oppelia* (*Streblites*) sp., *Lissoceras Grasi* d'Orb., *L.* cf. *leiosoma* Opp., *Bochianites neocomiensis* d'Orb., *Toxoceras* (?) sp., *Belemnites* (*Duvalia*) *latus* de Bl., *B.* (*D.*) *polygonalis* de Bl. var. *trabiformis* Duv. J., *B.* (*Aulacobelus*) *subfusiformis* Rasp. (1), *Trochus* sp., *Pleurotomaria* sp., *Nucula* sp., *Arca* sp., *Astarte* sp., *Lucina* sp., *Terebratula Carteroni* d'Orb., *Holectypus* sp., *Collyrites* (*Cardiopelta*) cf. *oblongus* d'Orb., *Serpula* sp., Polypiers. — Épaisseur, 100m.

2. Alternances de marnes et de calcaires avec intercalations de bancs de quartzites; les bancs calcaires contiennent : *Phylloceras serum* Opp., *Hoplites* (*Thurmannia*) *Thurmanni* Pict. et Camp. var. *gratianopolitensis* Sayn, *Belemnites* (*Aulacobelus*) *subfusiformis* de Blainv., *Exogyra latissima* Lmk. (*Ostrea Couloni* auct.), nombreux Polypiers. — Épaisseur, 60m environ.

3. Calcaires et marnes avec intercalations gréseuses; *Phylloceras serum* Opp., *Lytoceras quadrisulcatum* d'Orb., *Hoplites* (*Neocomites*) *neocomiensis* d'Orb., *Belemnites* (*Duvalia*) *latus* de Bl., *Belemnites* (*Aulacobelus*) *subfusiformis* de Bl. Ils passent latéralement à des calcaires pisolitiques à *Hoplites* (*Acanthodiscus*) *Michaelis* Uhl., *Cyprina* sp. et de nombreux Polypiers. — Épaisseur, 80m environ.

4. Calcaires pisolitiques avec, à la base, à Ourhanime : *Gervilleia alæformis* d'Orb., *Arca* (*Idonearca*) sp., *Trigonia carinata* Ag., *T. caudata* Ag., *T. rudis* Park., *Pecten* (*Neithea*) cf. *atava* Roem., *Terebratula* sp., Polypiers; et au sommet, au Nord d'Iguelfène : *Echinopygus eurypneustes* Gauth., *Toxaster* sp., *Gervilleia alæformis* d'Orb., *Pecten* (*Neithea*) *atava* Roem., *Nerinea* sp. Ces calcaires pisolitiques sont formés par des pseudo-pisolites de taille variable allant de 3 à 12mm; en plaque mince, Mme Paul Lemoine y a reconnu de nombreuses Girvanelles. — Épaisseur, 350m environ.

5. Alternances de marnes, de dolomies et de grès à stratification entrecroisée avec *Exogyra latissima* Lmk. — Épaisseur, 60m environ.

Les assises de base 1 et 2 appartiennent certainement au Valanginien inférieur, dont elles ont les fossiles les plus caractéristiques : c'est la zone à *Kilianella Roubaudi;* les lentilles calcaires développées dans 2 rappellent les calcaires du Fontanil de la Chartreuse. Le complexe 3 appartient certainement au Valanginien supérieur; le fossile le plus caractéristique

(1) J'adresse mes remerciements à M. Gignoux et à M. Breistroffer pour l'aide dont je leur suis redevable pour certaines déterminations.

est l'*Acanthodiscus Michaelis*, type décrit des *Obere Teschenere Schiefer* dans les Carpathes, c'est-à-dire du Valanginien.

Au-dessus, les couches 4 et 5 représentent l'Hauterivien, avec une faune de Lamellibranches qui se retrouve presque entièrement dans l'Hauterivien de la Haute-Marne et du Jura.

Le Valanginien inférieur, incontestablement profond, étant donné la nature des dépôts et leur faune, fait suite à un Berriasien beaucoup plus néritique (par un approfondissement brusque de la mer).

Au contraire, pendant tout le Néocomien, la mer diminue de profondeur; dès la partie supérieure du Valanginien inférieur, la présence d'Huîtres et de Polypiers prouve l'existence d'une faible hauteur d'eau et les calcaires pisolitiques à Algues de l'Hauterivien indiquent l'existence d'une mer profonde de quelques dizaines de mètres au plus. Cette diminution de profondeur n'est d'ailleurs pas due à un mouvement de remontée du tréfonds qui devait continuer à s'enfoncer, mais à l'accumulation des sédiments.

Au-dessus de l'Hauterivien on trouve une épaisseur pouvant atteindre 700 à 800^{m} de grès, de psammites, de grès à stratification entrecoisée et à galets de quartz (faciès grès à dragées des auteurs algériens), de marnes verdâtres ou violacées. Ce complexe d'origine vraisemblablement continentale, représente le Barrémien car on le voit (Tarhit Zidane) recouvert par les marnes à *Parahoplites Deshayesi* Leym. de l'Aptien inférieur (¹) et parfois aussi l'Aptien inférieur, car repose immédiatement au-dessus à Iguelfène l'Aptien supérieur à *Polyconites Verneuilli* Bayle. Le retour de la mer à l'Aptien prouve un mouvement de descente du tréfonds très rapide ayant compensé l'accumulation des épaisses séries antérieures.

TECHNIQUE PALÉONTOLOGIQUE. — *Sur un moyen d'isoler les microfossiles inclus dans les silex.* Note (²) de Mlle **Maria Lejeune**, transmise par M. Maurice Caullery.

Lorsqu'on se livre à l'étude microscopique de minces éclats de silex (étude dont l'intérêt, en paléoocéanographie notamment, suffit à justifier une note purement technique), on est frappé du nombre considérable de particules sombres dont est fort souvent encombrée la gangue translucide

(¹) Robert Laffitte, *Comptes rendus*, 198, 1934, p. 191.
(²) Séance du 10 août 1936.

de calcédonite. Que ces particules soient restées, malgré ou à cause de leur enrobage, de nature organique, charbonneuse, c'est ce dont on peut s'assurer par divers moyens. G. Deflandre [1] a appliqué dernièrement aux inclusions des silex des méthodes de coloration empruntées aux histologistes et obtenu de la sorte des résultats assez démonstratifs; mais auparavant, plusieurs chercheurs, W. Wetzel [2], C. Wetzel [3] et A. Eisenack [4] avaient montré que les restes de microorganismes résistent à l'attaque de l'acide fluorhydrique et ne sont pas silicifiés.

Ces derniers chercheurs ont toujours employé l'acide en solution concentrée et à chaud, A. Eisenack opérant dans un récipient d'ambre, dont la transparence lui permet de contrôler la marche de l'opération sans devoir soulever le couvercle et d'éviter ainsi des vapeurs nocives. Après avoir opéré également par solution d'acide, nous avons préféré y renoncer. Quelle que soit la concentration adoptée, le premier résultat tangible que l'on obtient par ce mode d'attaque de la silice, c'est de l'amener à se reformer aussitôt en partie sous forme de gel.

Mieux vaut employer l'acide à l'état gazeux. L'appareil est simple et peu coûteux : une marmite de plomb, pourvue, à mi-hauteur environ, d'un rebord interne. On y dépose une plaque de même métal non pas circulaire, mais polygonale, voire même simplement triangulaire : seuls les angles reposent donc sur le support. Le couvercle de la marmite doit être épais et fort exactement appliqué.

On introduit dans le fond du récipient une quantité de fluorure calcique proportionnelle au poids du silex que l'on se propose d'attaquer. Le silex est déposé sur la plaque polygonale, soit directement, soit par l'intermédiaire d'une lamelle de platine. Le verre paraffiné ne peut remplacer le platine : une forte condensation d'eau s'y produisait, gênant la marche de l'opération. Ensuite l'on verse de l'acide sulfurique dans le fond de la marmite en quantité telle que, non seulement tout le fluorure de calcium devient silicique, mais encore qu'un excès d'acide persiste pour servir de déshydratant. Ceci est nécessaire pour éviter que l'eau libérée au cours de la

---

(1) *Bull. Biol. Fr. et Belg.*, **69**, 1935, fasc. 2, p. 218 et suivantes.

(2) *Jahrb. f. Min. Geol. u. Pal.*, **47**, 1922, p. 54. L'auteur signale que ces essais ont été déjà réalisés en 1897 par K. Rordam.

(3) *Paleontographica*, **77**, 1933, p. 149 (9).

(4) *Paleont. Zeitschr.*, **13**, 1931, p. 76 et suivantes.

réaction ne puisse décomposer le fluorure en silice gélatineuse et en acide fluosilicique. On ferme hermétiquement le récipient.

A examiner le contenu, après quelques jours déjà, on constate un certain blanchiment du silex, dont la surface ayant cessé d'être lisse, apparaît finement pulvérulente. En vérité, l'attaque avance avec lenteur. Un fragment de silex d'environ 15^g ne perdit complètement sa silice qu'après plus d'un mois et demi de traitement. Sans doute il y a silex et silex, mais nos constatations n'ont pas été répétées au point que nous puissions préciser davantage. Pour se rendre compte de l'état d'achèvement de l'opération, il faut essayer d'enfoncer une aiguille aussi profondément que possible dans le fragment attaqué.

Lorsque l'opération est entièrement terminée, la substance du fragment est devenue très fragile; il faut l'enlever de la marmite avec précaution, en la faisant glisser de la plaque-support. La moindre chute fera s'effondrer et se réduire en poudre le délicat échafaudage.

La poudre peut être reprise par l'eau et examinée aussi au microscope. De minuscules squelettes d'organisme [Foraminifères, Hystrichosphéridées, des spicules d'Éponges ([1])] apparaissent, les uns flottant à la surface du mélange, les autres tombant au fond. Il est possible de les prélever et de les monter en préparation par les méthodes ordinaires.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Action de l'acide β-indolylacétique sur le développement des plantules.* Note ([2]) de MM. **Theodor Solacolu** et **Demetre Constantinesco**, transmise par M. Alexandre Guilliermond.

Nous avons décrit antérieurement le développement des plantules et des fragments de plantules isolées des graines mûres et non germées, dans des milieux différents. La Note présente résume nos recherches sur l'action de l'acide β-indolylacétique [ou hétéroauxine ([3])] sur les plantules et les fragments de plantules de *Ricinus communis* et surtout de *Phaseolus vulgaris*.

([1]) Spicules originellement siliceux, mais épigénisés par de la calcite, comme le démontre cette expérience. L. Cayeux (1935) signale le même phénomène dans la craie, phénomène qui soulève, pour le silex, un problème à discuter ailleurs.

([2]) Séance du 10 août 1936.

([3]) Fr. Kögl, *Ber. deutsch. chem. Ges.*, 68, 1935, p. 16.

Ces plantules ont été isolées aseptiquement et placées dans des tubes stérilisés à l'autoclave, sur du coton imbibé d'une solution de Knop 0,5 + 2 pour 100 de glucose, additionnée d'une quantité d'acide indolylacétique variable d'un tube à l'autre. Les observations ont été faites par rapport à des témoins développés dans un milieu dépourvu d'acide β-indolylacétique.

Les plantules de *Phaseolus vulgaris*, placées dans une solution de Knop



Fig. 1. — Plantules de *Ph. vulgaris* avec tumeurs, développées dans des solutions de Knop additionnées d'acide β-indolylacétique.

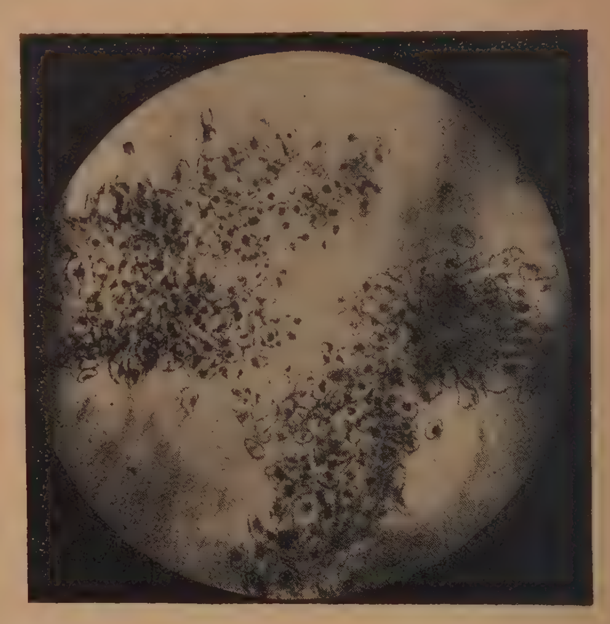


Fig. 2. — Microphotographie du tissu proliféré de *Ph. vulgaris* au niveau du collet. Les cellules rappellent des filaments mycéliens

glucosé additionnée d'hétéroauxine, ne développent plus de radicule. Après 48 heures de culture il apparaît sur chaque exemplaire, au niveau du collet, un renflement irrégulier, blanchâtre et turgescent, qui devient chaque jour plus visible (*fig.* 1). Si la concentration de l'acide β-indolyl-acétique augmente, les plantules ne développent plus de radicelles latérales, même après 6-7 jours de culture, tandis que ces radicelles apparaissent dès le troisième jour sur les témoins. Le moment de l'apparition des tumeurs et leur grandeur sont en rapport direct avec la quantité d'acide β-indolylacétique ajoutée à la solution nutritive,

la concentration présentant deux limites : l'une, supérieure, au-dessus de laquelle la substance devient toxique, et une autre, inférieure, d'une valeur d'environ 1×10^{-6}, au-dessous de laquelle l'hétéroauxine n'a plus d'action prolifératrice. Dans des concentrations proches de la limite supérieure, le processus de tuméfaction atteint non seulement la zone du collet, mais aussi l'axe hypocotylé entier ([1]), et parfois même la région d'insertion des cotylédons (*fig.* 1 *b*). Les concentrations supérieures d'hétéroauxine empêchent d'autre part le développement de la gemmule et la croissance en longueur de l'axe hypocotylé, mais favorisent son épaississement.

En transplantant la région tuméfiée dans une solution de Knop glucosé dépourvue d'acide β-indolylacétique, on constate que la tumeur ralentit sa croissance et que les radicelles commencent à se développer 24-36 heures après la transplantation. La formation des radicelles dans les régions présentant des tumeurs montre qu'il y a non seulement un retard dans leur apparition, mais aussi une modification de leur plan de développement normal, précisé par nous antérieurement. Sur les coupes transversales de la région de ces tissus néoformés, on distingue les points de croissance, méristématiques, des radicelles, alternant irrégulièrement avec les amas de cellules qui constituent les tumeurs.

De même les plantules de Ricin, ainsi que les fragments de plantules de Haricot, d'une longueur de 1-2^{mm}, cultivés dans un milieu de concentration supérieure d'acide β-indolylacétique, ont présenté dès le début une tuméfaction totale, sans développement, ni restitution de radicelles.

Un examen microscopique des tissus proliférés (*fig.* 2) a été effectué, soit sur des coupes au moyen de la méthode Bouin ou Regaud et coloreés à l'hématoxyline ferrique, soit sur des coupes colorées vitalement. Celui-ci nous a montré que les cellules de la tumeur sont allongées, ayant l'aspect de filaments mycéliens ([2]). Ces cellules présentent de grandes vacuoles, très peu de mitochondries disposées irrégulièrement ; elles ont une membrane mince, 1, 2 et même 3 nucléoles et un cytoplasme abondant ; autour de leur noyau plus ou moins fusiforme, on voit des amyloplastides colo-

---

([1]) Les plantules développées sur leurs propres réserves cotylédonnaires et placées dans des solutions d'hétéroauxine présentent des phénomènes tout à fait différents, ainsi que nous le montrerons ultérieurement.

([2]) R.-J. Gautheret, *Recherches sur la culture des tissus végétaux*, Paris, 1935, p. 205.

rables par l'iodo-iodure. Dans le Ricin, on distingue aussi des oléoplastides.

En conclusion : 1° *a*. L'acide β-indolylacétique empêche, à une certaine concentration, le développement de la radicule et de la gemmule. — *b*. Cette substance produit des tumeurs au niveau du collet ou bien tout le long de l'axe hypocotylé, dues à une prolifération des tissus superficiels et des méristèmes internes qui donnent naissance à de nombreuses ébauches de radicelles. — *c*. Ce processus de tuméfaction modifie le plan d'orientation des tissus, qui prennent la forme de filaments mycéliens.

2° Il existe une corrélation entre le déclenchement des processus de restitution ou ceux de prolifération et la concentration du milieu en acide β-indolylacétique.

PHYSIQUE BIOLOGIQUE. — *Dosage spectrophotométrique de l'α-œstrone et de ses dérivés*. Note [1] de MM. **M. Sureau** et **P. Grandadam**, présentée par M. Antonin Gosset.

Nous avons utilisé la méthode décrite par MM. Chevallier et Dubouloz [2]. Les rayons d'une source ultraviolette, après avoir traversé la substance à étudier, sont concentrés par une lentille de quartz sur la fente collimatrice d'un monochromateur. Leur intensité est mesurée par une cellule photoélectrique sensibilisée à l'ultraviolet, aux bornes de laquelle le courant est amplifié par une triode à résistance.

Nous avons utilisé cette méthode, avec quelques modifications, dans un double but :

1° Réaliser des spectres étalons de corps purs;

2° Doser ces corps dans certains extraits de liquides biologiques.

1° *Spectres étalons de corps purs* (en solutions alcooliques diluées) :

a. *α-œstrone*. — Nous avons trouvé deux bandes de 2100 à 2400 Å et de 2600 à 2950 Å.

b. *Dihydro-α-œstrone*. — Mêmes bandes d'absorption.

Seul le sommet à 2225 Å de l'α-œstrone est déplacé vers le visible d'une quantité égale à 25 Å et il apparaît une anomalie à 2850 Å.

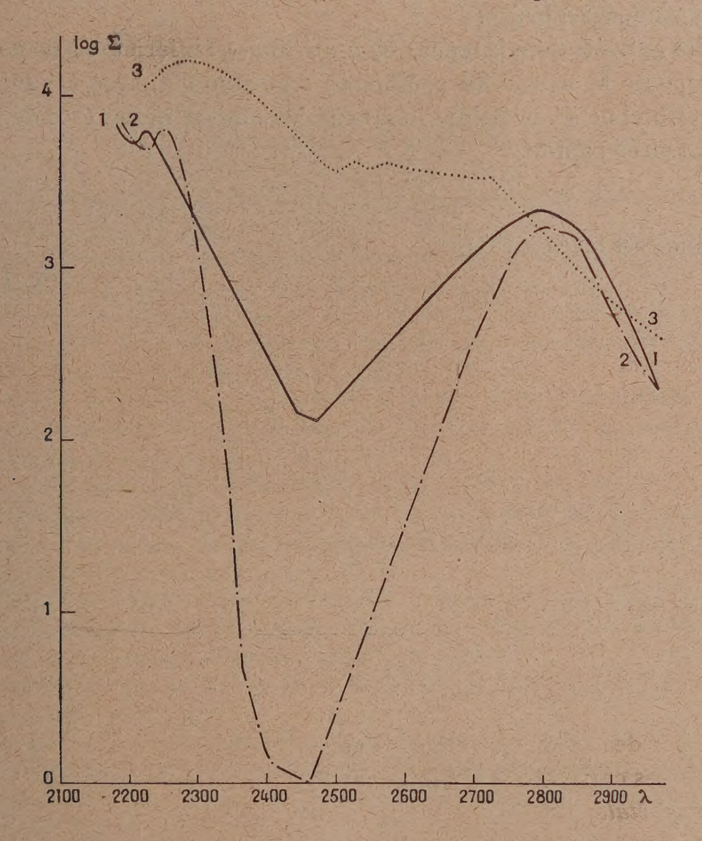
---

(1) Séance du 20 juillet 1936.

(2) *J. Physio-Pathol. gén.*, 33, 1935, p. 874.

c. *Benzoate de dihydro-α-œstrone.* — Le sommet situé à 2300 Å correspond en position à celui de l'acide benzoïque.

2° *Applications au dosage.* — Les valeurs du coefficient d'absorption aux points singuliers de la courbe, ainsi déterminées, peuvent servir pour le



——— Courbe 1 : α-œstrone. C moléculaire $= \frac{M}{5400}$; C en poids $= \frac{1}{20\,000}$.

—·—·— Courbe 2 : Dihydro-α-œstrone. C moléculaire $= \frac{M}{5440}$; C en poids $= \frac{1}{20\,000}$.

.... Courbe 3 : Benzoate de Dihydro-α-œstrone. C moléculaire $= \frac{M}{18\,800}$; C en poids $= \frac{1}{50\,000}$.

dosage de ces corps au sein des liquides biologiques dans les limites d'application de la loi d'absorption de Beer.

Nous avons ainsi dosé l'α-œstrone dans les extraits d'urine de femme enceinte préparés suivant la méthode de Marrian.

Lorsque la proportion d'impuretés par rapport à l'hormone est, dans la solution considérée, inférieure à 40 pour 100, le dosage se fait aisément d'après la valeur du coefficient au sommet situé à 2800 Å.

Le résultat est connu avec une précision de ± 2 pour 100; l'opération se fait en un quart d'heure.

Pour les extraits dont la teneur en α-œstrone est inférieure à 60 pour 100, il faut repérer la valeur du coefficient ε au sommet situé à 2225 Å. La précision obtenue à ces faibles longueurs d'onde est moins grande, mais le dosage est aussi rapide.

La séance est levée à $15^{h}15^{m}$.

A. Lx.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus pendant les séances de juillet 1936.

Paul Painlevé, Paroles et écrits, publié par la Société des Amis de Paul Painlevé. Paris, éditions Rieder, 1936, 1 vol. 23^{cm}.

Comité international des Poids et Mesures, Procès-verbaux des séances. Deuxième série, tome XVII, session 1935. Paris, Gauthier-Villars, 1935; 1 vol. 22^{cm}.

Étude des Saturnioïdes normaux. Famille des Hémileucidés, troisième et dernière partie, par E.-L. Bouvier. Extrait des *Annales des Sciences naturelles. Zoologie,* tome 19, 10e série. Paris, Masson et Cie, 1936; 1 vol. 28^{cm},5.

Université de Strasbourg. Faculté de Médecine. Institut de Chimie biologique. Directeur Dr Maurice Nicloux. *Recueil des Travaux,* vol. 1 à 12. Strasbourg, Imprimerie alsacienne, 1925 à 1936; 12 vol. 25^{cm}.

Nam-nù Báo toàn, par Lê Huy Phach. Hanoï, 1936; 1 vol. 22^{cm},5.

Documentation statistique sur les cyclones malgaches, par le R. P. Ch. Poisson, Publications du Service météorologique de Madagascar, n° 4, mai 1936. Tananarive. Imprimerie de l'Imerina, 1936; 1 fasc. 24^{cm},5.

La propriété rurale, par C. Brasart. Conférences organisées par l'Institut national agronomique et l'Association amicale de ses anciens Élèves. Paris, librairie de l'Institut national agronomique, 1936; 1 vol. 25^{cm}.

La guerre devant la Science et la Religion, par James Pointe. Paris, le Courrier littéraire, 1936; 1 vol. 19^{cm}.

Paléontologie. Les Poissons oligocènes du Nord Caucase, par V. P. Smirnov, in *Travaux scientifiques de l'Université de l'Usbekistan,* Samarkand, 1936; 1 vol. 23^{cm}.

Confédération des Sociétés scientifiques françaises, par Charles Marie. Paris, Institut de Chimie, 1936; 1 fasc. 24^{cm}.

Les fulgurites du Sahara, par A. Lacroix. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences coloniales,* tome 25. Paris, Société d'éditions géographiques, maritimes et coloniales, 1936; 1 fasc. 28^{cm}.

Étude géologique des montagnes d'Escreins (Hautes-Alpes et Basses-Alpes), par Fernand Blanchet. Grenoble, Allier Père et Fils, 1934; 1 vol. 25^{cm},5.

Mélanges Paul Pelseneer in *Mémoires du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique,* 2e série, fasc. 3. Bruxelles 1936; 1 vol. 33^{cm}.

Les solutions concentrées, par Jean Timmermans. Paris, Masson et Cie, 1936, 1 vol. 25^{cm}.

Les atomes, par JEAN PERRIN. Rédaction nouvelle in *Nouvelle collection scientifique* dirigée par Émile Borel. Paris, Félix Alcan, 1936; 1 vol. 18cm,5.

Institut national météorologique de Pologne. *Bibliographie des fonctionnaires et anciens collaborateurs de l'Institut national météorologique de Pologne*, publiée à l'occasion de la conférence des directeurs de l'Organisation météorologique internationale à Varsovie. Varsovie, 1935; 1 fasc. 22cm,5. (Donné par M. Charles Lallemand.)

Institut national métérologique de Pologne. *Résultats des observations de l'expédition polonaise de l'année polaire* 1932-1933 *à l'île des Ours*, par JEAN LUGEON, fasc. 1 : *Météorologie;* fasc. 2 : *Magnétisme terrestre;* fasc. 3 : *Parasites atmosphériques;* fasc. 4 : *Aurores polaires*. Varsovie, 1936; 4 fasc. 31cm. (Donnés par M. Charles Lallemand.)

ERRATA.

(Séance du 3 août 1936.)

Note de M. *Clément Courty*, Exaltation du magnétisme de l'oxyde ferrique par calcination en présence de papier à filtre sans cendres :

Page 371, ligne 5, *au lieu de* Écart net, 46″, *lire* Écart net, 7″.
Page 372, note du bas de la page, *au lieu de* p. 1929, *lire* p. 369.